Einführung in die Logik - 6

Prädikatenlogik: modelltheoretische Semantik

Modelltheoretische / Denotationelle Semantik der Prädikatenlogik

Ein **Modell** ist ...

ein künstlich geschaffenes Objekt, das die Struktur eines untersuchten Objekts in vereinfachter Form nachbildet. Die Eigenschaften der Elemente im Modell und die Beziehungen zwischen diesen müssen denen im untersuchten Objekt analog bzw. ähnlich sein.

❖ Modelle für die PL spezifizieren
- Diskursuniversum/Domäne/Individuenbereich D *(a.: U)*
- Eigenschaften der Elemente aus D
- Relationen zwischen den Elementen aus D

Modelltheoretische / Denotationelle Semantik der Prädikatenlogik

Beispiel:

❖ Ein Modell der Logikvorlesung (in Ausschnitten)

- Diskursuniversum/Domäne/Individuenbereich D
- Eigenschaften der Elemente aus D
- Relationen zwischen den Elementen aus D

Modelltheoretische / Denotationelle Semantik der Prädikatenlogik

Def.: Ein **Modell für die Sprache der Prädikatenlogik PL** ist ein geordnetes Paar M = <D, V>, wobei

auch: **U**

1. $D \neq \varnothing$ (Domäne, Individuenbereich, Universum)

2. V (die Modellfunktion, Wertzuweisungsfunktion) ist eine Abbildung derart, dass

i.	V(p)	$\in$	{0, 1}	falls p Aussagenvariable ist
ii.	V(a)	$\in$	D	falls a Individuenkonstante ist
iii.	V(F)	$\subseteq$	D	falls F Prädikatsausdruck ist
iv.	V(Rn)	$\subseteq$	$D \times \ldots \times D$ (n-mal)	falls Rn n-stelliger Relationsausdruck ist

Erläuterungen zur Wertzuweisungsfunktion V

V(p)	$\in$	{0, 1}
V(a)	$\in$	D
V(F)	$\subseteq$	D
$V(R^n)$	$\subseteq$	$D \times ... \times D$ (n-mal)

$\Downarrow$

charakterisiert mathematischen Typ des Wertes:

$\in$	:	Wert ist ein Objekt		
		z.B.:		
		V(p)	=	1
		V(maria)	=	m
$\subseteq$	:	Wert ist eine Menge		
		z.B.:		
		V(F)	=	{m, n, a, b}
		V(R2)	=	{<m, a>, <n, b>}

Erläuterungen zur Wertzuweisungsfunktion V

V(F)	$\subseteq$	**D**
$V(R^2)$	$\subseteq$	$\mathbf{D} \times \mathbf{D}$
$V(R^3)$	$\subseteq$	$\mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D}$

$\Downarrow$

charakterisiert die interne Struktur der Menge (d.h. den Typ der Elemente der Menge):

D	:	Menge aus einfachen Objekten		
		z.B.:		
		V(F)	=	{m, n, a, b}
$\mathbf{D} \times \mathbf{D}$	:	Menge von geordneten Paaren von einfachen Objekten		
		z.B.:		
		$V(R^2)$	=	{<m, a>, <n, b>}

für n-stellige Relationen: Menge von n-Tupeln (n-stelligen Folgen) von Objekten

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Modelltheoretische / Denotationelle Semantik der Prädikatenlogik

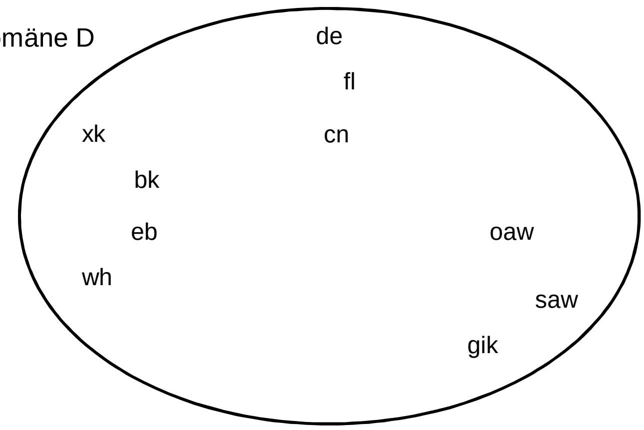
ein **Modell** einer Vorlesung

- ❖ Weiblich (_)
- ❖ Männlich (_)
- ❖ Hat-als-Muttersprache (_, _)
- ❖ Studiert_im Nebenfach (_, _)
- ❖ ...

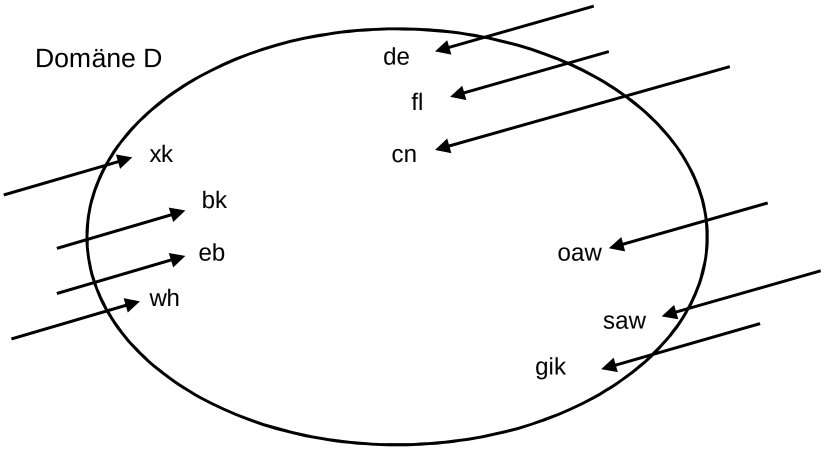
  - Diskursuniversum/Domäne/Individuenbereich D
  - Eigenschaften der Elemente aus D
  - Relationen zwischen den Elementen aus D

die Objekte im Beispielmodell

Domäne D

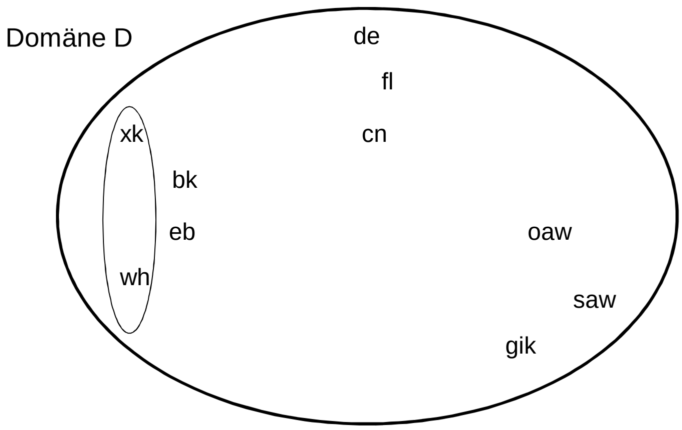


Denotate von Individuentermen: Objekte aus D



V(X.K.) = xk, V(B.K.) = bk, V(E.B.) = eb, V(W.H.) = wh
V(Deutsche-Sprache) = de, V(Flämische-Sprache) = fl, V(Chinesische-Sprache) = cn
V(Ostasienwissenschaft) = oaw, V(Südasienwissenschaft) = saw, V(Germanistik-im-Kulturvergleich) = gik

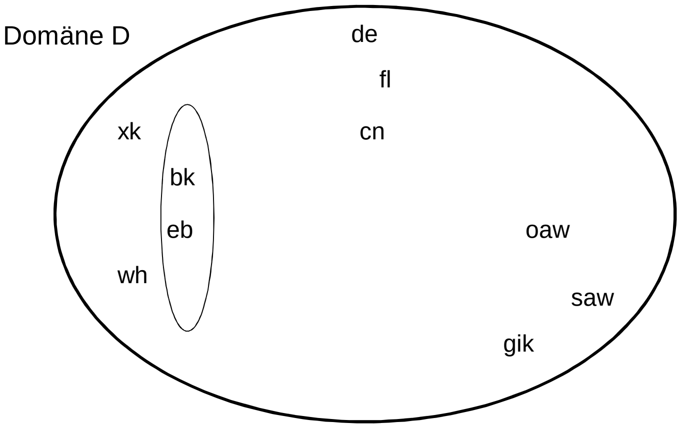
Denotate von 1-st. Prädikaten: Mengen von Objekten aus D



V(Weiblich) = {xk, wh}

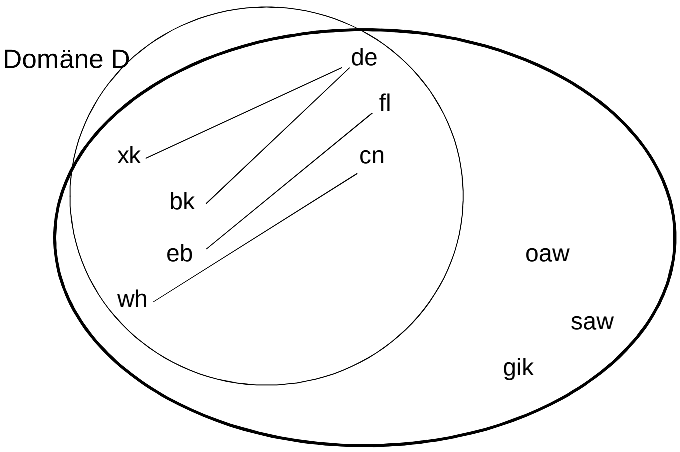
Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Denotate von 1-st. Prädikaten: Mengen von Objekten aus D



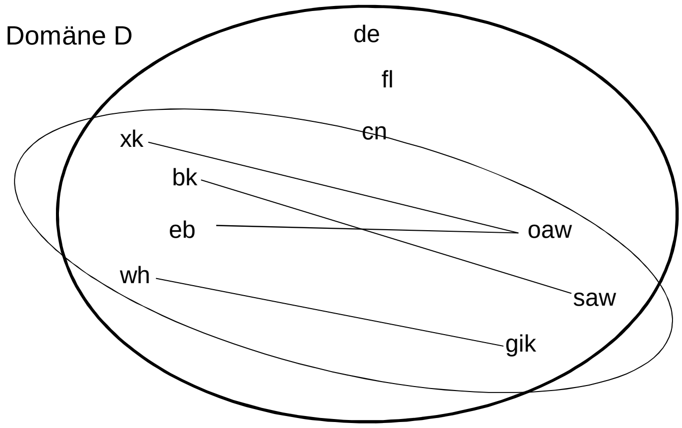
V(Männlich) = {bk, eb}

Denotate von n-st. Relationen: Mengen von n-st. Folgen von Objekten aus D



V(Hat-als-Muttersprache) = {<xk, de>, <bk, de>, <eb, fl>, <wh, cn>}

Denotate von n-st. Relationen: Mengen von n-st. Folgen von Objekten aus D



V(Studiert-im-Nebenfach) = {<xk, oaw>, <bk, saw>, <eb, oaw>, <wh, gik>}

Modelltheoretische / Denotationelle Semantik der Prädikatenlogik

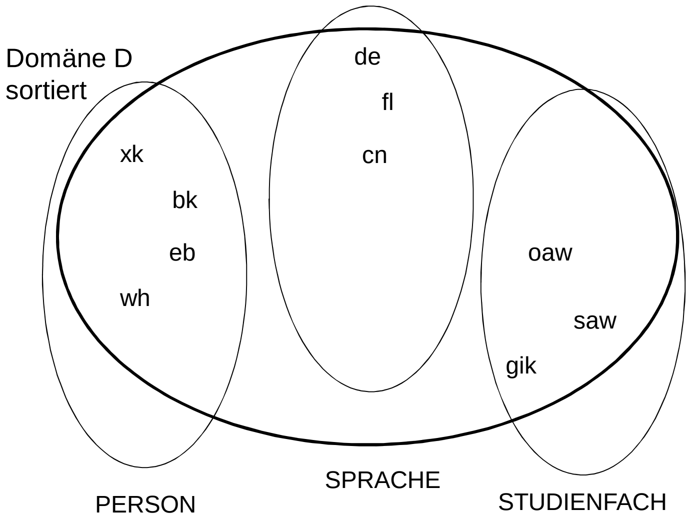
ein **Modell** der Vorlesung

- Weiblich (_)
- Männlich (_)
- Hat-als-Muttersprache (_, _)
- Studiert-im-Nebenfach (_, _)
- ...

  - Diskursuniversum/Domäne/Individuenbereich D
  - Eigenschaften der Elemente aus D
  - Relationen zwischen den Elementen aus D

    - ggf. **Sortierung der Domäne D**

Sortierung der Domäne des Beispielmodells



Modelltheoretische / Denotationelle Semantik der Prädikatenlogik

- Modelle repräsentieren (u.U. komplexe) Situationen / Sachverhalte / Weltzustände (*state of affairs*).
- *N.B.:* Jede Zeile einer Wahrheitswerttabelle stellt ein Modell für die jeweiligen Aussagen dar.

Modell	**p**	**q**	**p $\wedge$ q**	**p $\rightarrow$ q**	**$\neg$ p $\wedge\neg$ q**
V(p)=1, V(q)=1	1	1	1	1	0
V(p)=1, V(q)=0	1	0	0	0	0
V(p)=0, V(q)=1	0	1	0	1	0
V(p)=0, V(q)=0	0	0	0	1	1

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Modelltheoretische / Denotationelle Semantik der Prädikatenlogik

Def1: Der **semantische Wert** (die **Interpretation**) eines Ausdrucks A in einem Modell M, **$[|A|]^M$**, ist definiert durch:

(1)	(a)	$[\|p\|]^M$	=	V(p)	für Aussagenvariablen p
	(b)	$[\|a\|]^M$	=	V(a)	für Individuenkonstanten a
	(c)	$[\|F\|]^M$	=	V(F)	für Prädikate F
	(d)	$[\|Rn\|]^M$	=	V(Rn)	für n-stell. Relationen Rn

(2) (a) $[|\ F(a)\ |]^M = 1$

gdw. $[|\ a\ |]^M \in [|\ F\ |]^M$

(b) $[|\ R^{\mathbf{n}}(a_1, ..., a_n))\ |]^M = 1$

gdw. $<[|\ a_1\ |]^M, ..., [|\ a_n\ |]^M > \in [|R^n\ |]^M$

tbc

Modelltheoretische / Denotationelle Semantik der Prädikatenlogik

Def: [Fortsetzung] Der **semantische Wert** (die **Interpretation**) eines Ausdrucks A in einem Modell M, **$[|A|]^M$**, ist definiert durch:

(3) (a) $[|\ \forall x\ A\ |]^M = 1$

gdw. immer $[|\ A\ |]^M = 1$, wenn man als Wert von x nacheinander alle Elemente aus D einsetzt

(b) $[|\ \exists x\ A\ |]^M = 1$

gdw. mindestens einmal $[|\ A\ |]^M = 1$, wenn man als Wert von x nacheinander alle Elemente aus D einsetzt

Quantorenauswertung formal mittels Funktion der Variablenbelegung g:

$[|\ \exists x\ A\ |]^{M,\ g}$ bzw. $[|\ \forall x\ A\ |]^{M,\ g}$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Übung zur modelltheoretischen Semantik für PL

Für ein Sprachfragment mit den Individuenkonstanten a, b,c, dem Prädikatsausdruck F und dem Relationsausdruck R sei ein Modell gegeben, dessen Individuenbereich D aus den Zahlen 1, 2 und 3 besteht; die Zahlen werden durch die Individuenkonstanten a, b bzw. c bezeichnet.

- *F soll als "ist ungerade Zahl" interpretiert werden.*
- *R soll als "ist (echt) kleiner als" interpretiert werden.*

Aufgaben:

(1) Definieren Sie die Wertzuweisungsfunktion V für alle Individuenkonstanten, Prädikate und Relationen des Sprachfragments.

(2) Übersetzen Sie die folgenden prädikatenlogischen Aussagen in umgangssprachliche Sätze (entsprechend dem Modell).

(i) $F(a)$

(ii) $R(b, a)$

(iii) $\exists x \; \forall y \; (F(y) \rightarrow y=x)$

(iv) $\neg\exists x \; R(c, x)$

(v) $\neg\exists x \; R(x, c)$

(vi) $\forall x \; \forall y \; (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$

(3) Welche der Aussagen aus (2) sind wahr in dem Modell, welche nicht? Begründen Sie Ihre Entscheidung mit Hilfe der Definition der modelltheoretischen Interpretation (d.h. des semantischen Werts).

Übung zur modelltheoretischen Semantik für PL

$D = \{1, 2, 3\}$

$V(a) = 1$ $\quad$ $V(b) = 2$ $\quad$ $V(c) = 3$

$V(F) = \{1, 3\}$ $\quad$ $V(R) = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>\}$

$[\| R(b, a) \|]^M$	$=$	1	gdw.
$< [\| b \|]^M, [\| a \|]^M >$	$\in$	$[\| R \|]^M$	gdw.
$< V(b), V(a) >$	$\in$	$V(R)$	gdw.
$<2, 1>$	$\in$	$\{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>\}$	

aber:

$<2, 1> \quad \notin \quad \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>\}$

also:

$[| R(b, a) |]^M \quad \neq \quad 1$

also:

$[| R(b, a) |]^M \quad = \quad 0$

wichtige Gesetze (Theoreme) der PL

Gesetze der Quantoren-Negation

(1)	a.	$\vdash$	$\exists x\, F(x)$	$\leftrightarrow$	$\neg\forall x\, \neg F(x)$
	b.	$\vdash$	$\exists x\, \neg F(x)$	$\leftrightarrow$	$\neg\forall x\, F(x)$
	c.	$\vdash$	$\neg\exists x\, F(x)$	$\leftrightarrow$	$\forall x\, \neg F(x)$
	d.	$\vdash$	$\neg\exists x\, \neg F(x)$	$\leftrightarrow$	$\forall x\, F(x)$

Gesetze der Quantoren-Distribution

(2)	a.	$\vdash$	$\forall x\, (F(x) \wedge G(x))$	$\leftrightarrow$	$\forall x\, F(x) \wedge \forall x\, G(x)$
	b.	$\vdash$	$\exists x\, (F(x) \vee G(x))$	$\leftrightarrow$	$\exists x\, F(x) \vee \exists x\, G(x)$
	c.	$\vdash$	$\forall x\, F(x) \vee \forall x\, G(x)$	$\rightarrow$	$\forall x\, (F(x) \vee G(x))$
	d.	$\vdash$	$\exists x\, (F(x) \wedge G(x))$	$\rightarrow$	$\exists x\, F(x) \wedge \exists x\, G(x)$
	e.	$\vdash$	$\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x))$	$\rightarrow$	$(\forall x\, F(x) \rightarrow \forall x\, G(x))$
	f.	$\vdash$	$\exists x\, (F(x) \rightarrow G(x))$	$\rightarrow$	$(\forall x\, F(x) \rightarrow \exists x\, G(x))$

wichtige Gesetze (Theoreme) der PL

Gesetze der Quantoren-(Un)Abhängigkeit

(3)	a.	$\vdash$	$\forall x \forall y\, R(x, y)$	$\leftrightarrow$	$\forall y \forall x\, R(x, y)$
	b.	$\vdash$	$\exists x \exists y\, R(x, y)$	$\leftrightarrow$	$\exists y \exists x\, R(x, y)$
	c.	$\vdash$	$\exists x \forall y\, R(x, y)$	$\rightarrow$	$\forall y \exists x\, R(x, y)$

Gesetze der Quantoren-Bewegung

(Voraussetzung: x kommt in p nicht frei vor)

(4)	a.	$\vdash$	$\exists x\, (p \rightarrow F(x))$	$\leftrightarrow$	$(p \rightarrow \exists x\, F(x))$
	b.	$\vdash$	$\forall x\, (p \rightarrow F(x))$	$\leftrightarrow$	$(p \rightarrow \forall x\, F(x))$
	c.	$\vdash$	$\exists x\, (F(x) \rightarrow p)$	$\leftrightarrow$	$(\forall x\, F(x) \rightarrow p)$
	d.	$\vdash$	$\forall x\, (F(x) \rightarrow p)$	$\leftrightarrow$	$(\exists x\, F(x) \rightarrow p)$

Weitere Quantorengesetze

(5)	a.	$\vdash$	$\forall x \forall y\, R(x, y)$	$\rightarrow$	$\forall x\, R(x, x)$
	b.	$\vdash$	$\forall x\, F(x) \vee \exists x\, \neg F(x)$		
	c.	$\vdash$	$\forall x\, F(x)$	$\rightarrow$	$\exists x\, F(x)$

Prädikatenlogik 1. Stufe als semantischer Repräsentationsformalismus

[Lit.: Pinkal 2000]

Stärken von PL-1 als semantischem Repräsentationsformalismus

- Näherung an angemessene Bedeutungsbeschreibung durch Vergleich von präzise angebbaren errechneten Wahrheitsbedingungen mit intuitiven Wahrheitsurteilen

(1) a. *Nur Peter ist intelligent.*

b. $I(p) \wedge \forall x \, (x \neq p \rightarrow \neg I(x))$

(2) a. *Nicht nur Peter ist intelligent.*

b. $\neg(I(p) \wedge \forall x \, (x \neq p \rightarrow \neg I(x)))$

» wahr, wenn niemand im Modell intelligent ist

c. $I(p) \wedge \neg\forall x \, (x \neq p \rightarrow \neg I(x))$

» Präsupposition: *Peter ist intelligent*

Prädikatenlogik 1. Stufe als semantischer Repräsentationsformalismus

Stärken von PL-1 als semantischem Repräsentationsformalismus

- PL-Deduktionskalkül
  - Inferenzverfahren zur Unterstützung der semantischen Auswertung
- denotationelle Semantik der PL
  - erlaubt Kontrolle des Deduktionsmechanismus bzgl. Korrektheit und Vollständigkeit

Prädikatenlogik 1. Stufe als semantischer Repräsentationsformalismus

? und die Schwächen von PL-1 ?

- angemessene Ausdrucksstärke für linguistische Anwendungen:
  - intensionale Erweiterungen der klassischen AL/PL-1: Modallogik, Temporallogik
  - mereologische Modellstrukturen für Plurale, Ereignisse, Zeiten, ...
  - höherstufige Logikformalismen: Typentheorie und λ-Kalkül
- optimierte Balance zwischen Ausdrucksstärke und Verarbeitungseigenschaften (Entscheidbarkeit, Komplexität)
  - Beschreibungslogiken (Description / Terminological Logic Systems)

Recap Prädikatenlogik
Prof. Dr. Anette Frank
Formale Semantik, WS 2014/15

aus: Anette Frank,
Formale Semantik,
WS 2014/15

Recap I: PL-1

Motivation

- Jeder Student studiert ein Fach.
- Jeder fleissige Student hat bestanden.
- Ein Student hat nicht bestanden.
- Ein verwirrter Student hat bestanden.
- Kein Student ist durchgefallen.

⇒ Aussagen über **Individuen und ihre Eigenschaften bzw. Handlungen**

⇒ Aussagen über **Teilmengen von Individuenmengen** (fleissige Studenten)

⇒ **Quantifizierende Aussagen erlauben Schlussfolgerungen**

- Jeder/alle, einer, keiner ... von dem etwas gilt
- Der Student der nicht bestanden hat, war nicht fleissig.

⇒ **Prädikate** stehen **in logisch-semantischer Beziehung**

wer besteht, ist nicht durchgefallen

wer durchfällt, hat nicht bestanden

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Anette Frank,
Formale Semantik,
WS 2014/15

PL-1:
Modell, Syntax und Semantik

Die **Bedeutung** prädikatenlogischer Formeln wird formal expliziert durch **Einbettung in ein Modell**. (Tarski!)

Wann ist eine Formel ϕ in einem Modell **wahr bzw. erfüllbar**?

- Die Erfüllbarkeit einer Formel ϕ im Modell M wird definiert als **Relation** $M,g \models \phi$, wobei g eine Variablenbelegungsfunktion für Individuenvariablen x,y,z.
- Eine **Variablenbelegungsfunktion** g weist jeder Variablen $x \in VAR$ einen Wert aus der Domäne zu: $g: VAR \rightarrow D$
- ϕ ist **erfüllt/wahr/gültig** bzgl. M u. g ($M,g \models \phi$) falls $[[\phi]]^{M,g} = 1$.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Anette Frank,
Formale Semantik,
WS 2014/15

Interpretation von Quantoren

- **Interpretation einer Formel** bezüglich M und g:
  - $[\![\forall x.\phi]\!]^{M,g} = 1$ gdw für alle $d \in U_M$ gilt $[\![\phi]\!]^{M,g[x/d]} = 1$
  - $[\![\exists x.\phi]\!]^{M,g} = 1$ gdw es gibt $d \in U_M$ so daß $[\![\phi]\!]^{M,g[x/d]} = 1$
- **g[x/d]** ist die Variablenbelegung, die **identisch zu g** ist, außer daß sie der **Variablen x** das **Individuum d** zuweist
  - sprich: "g mit d für x"
- Resultat: Für freie Variablen bestimmt g die Interpretation
  - Für Variablen im Skopus eines Quantors wird g durch Überschreibung **explizit** instantiiert

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Anette Frank,
Formale Semantik,
WS 2014/15

Variablenbelegungen

- $g[x/d](y) = d$, wenn $x = y$
- $g[x/d](y) = g(y)$, wenn $x \neq y$

	x	y	z	u	…
g	a	b	c	d	…
g[x/a]	**a**	b	c	d	…
g[y/a]	a	**a**	c	d	…
g[y/g(z)]	a	**c**	c	d	…
g[y/a][u/a]	a	**a**	c	**a**	…
g[y/a][y/b]	a	**b**	c	d	…

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Anette Frank,
Formale Semantik,
WS 2014/15

Prädikatenlogik: Zusammenfassung

- **Interpretation von Formeln** bzgl. Modell M und Variablenbelegung g:
  - $[\![R(t_1, \ldots, t_n)]\!]^{M,g} = 1$ gdw $\langle [\![t_1]\!]^{M,g}, \ldots, [\![t_n]\!]^{M,g} \rangle \in V_M(R)$
  - $[\![t_1 = t_2]\!]^{M,g} = 1$ gdw $[\![t_1]\!]^{M,g} = [\![t_2]\!]^{M,g}$
  - $[\![\neg\phi]\!]^{M,g} = 1$ gdw $[\![\phi]\!]^{M,g} = 0$
  - $[\![\phi \wedge \psi]\!]^{M,g} = 1$ gdw $[\![\phi]\!]^{M,g} = 1$ and $[\![\psi]\!]^{M,g} = 1$
  - $[\![\phi \vee \psi]\!]^{M,g} = 1$ gdw $[\![\phi]\!]^{M,g} = 1$ or $[\![\psi]\!]^{M,g} = 1$
  - $[\![\phi \rightarrow \psi]\!]^{M,g} = 1$ gdw $[\![\phi]\!]^{M,g} = 0$ or $[\![\psi]\!]^{M,g} = 1$
  - $[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!]^{M,g} = 1$ gdw $[\![\phi]\!]^{M,g} = [\![\psi]\!]^{M,g}$
  - $[\![\exists x.\phi]\!]^{M,g} = 1$ gdw es gibt ein $d \in U_M$ sodass $[\![\phi]\!]^{M,g[x/d]} = 1$
  - $[\![\forall x.\phi]\!]^{M,g} = 1$ gdw für alle $d \in U_M$, $[\![\phi]\!]^{M,g[x/d]} = 1$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg